物理化学の進歩 Vol. 2 No. 1 (1928)

新 量 子 論

田 村 松 平

Planck が熱輻射の理論に於いて輻射の機構に Energie の素量的不連續性を假定してから,量子論は近代物理學理論の著しい進歩の內容をなした。其の後 Einstein, Bohr の研究と共に斯かる不連續性の假定は物理現象の基本的な要素にまで即ち個々の原子は連續的でなく,discrete な狀態をとり,其の狀態變化は不連續的にのみ起るといふ表象にまで一般化乃至徹底せしめられたのであつた。かくして幾多の原子的現象への理論的釋明と共に理論的體系の展開を私たちは見たのである。併し乍ら此の量子理論はその當初より其れを發芽とするところの眞んとの量子論の出現を豫感せしめないではなかつた。其れは蓋し此の理論が原子の定常狀態に古典力學に依る運動的記載が可能であるとすることに依る量子論的表象の古典電磁力學的表象との美しからざる混淆の故であつたでもあらう。其れが基礎假定とするところの古典力學的形像への少なからざる困難の現はれたことに起因するのでもあらう。光學的現象の問題に於ける如き,十字形電氣磁氣場に於ける水素原子の問題の如き,多體問題並びに輻射線の强度問題に於ける如き。例へば光の分散論に於いて極めて明らかに看取せられるやうに,かの Bohr, Kramers, 及び Slater の假設的輻射場の見解(この考察は光學的現象に對する量子論的說明を可能ならしめる)を,いかにして量子過程に際し Energie 及び Impuls の轉換が光量子の表象に從つて行はれるといふ經驗事實(Geiger und Bothe, Compton and Simon)と合致せしめ得るか,といふ大きな困難は別としても照らす光の振動數が

原子の吸收線のそれに一致するときが共鳴の場合である,といふ事實は,照明原子への古典力學の適用を妨げるものである,といふ困難を伴ふ。何故と言ふにその適用は共鳴の位置として原子内の電子の週廻振動數が照らす光のそれにひとしいときを與へるものであり,そうして吸收線の振動數(Einstein-Bohr の振動數條件から energetisch に決定せられる)は電子の定常狀態に於ける週廻の振動數とは一般に相異るからである。私たちはこの場合古典力學に對する大膽なる拒否として見られたかの Bohr の量子轉移の表象に基くことによつて古典力學から離れねばならなかつたのであらう。また一つの原子内の數多の電子相互の交互作用に於いても同樣のことが起り得るのであつて,其の作用が交變的場なることは古典力學の適用を許さない。かくして原子の定常狀態への古典力學の妥當と所謂量子條件との假定を以てする Bohr の量子法則は水素原子に於ける Balmersche Formel の理論的解明に於いて其の成功の第一頁を飾つたものにも拘らず,多體問題に於いて上記の大きな障害に當面しなければならなかつたのである。光の分散論に於ける Kramers 及び Heisenberg 等の考察,原子内電子の交互作用に關する Born 等の貢獻は,上のやうな障害を避けやうとしたものであつて,たとへ充分でなかつたとしても,原子内の電子の定常狀態に於ける週廻振動數に對して,從つてまたある程度に於いて定常狀態の古典力學的運動表象から物理的現實性を奪ひとつたといふ點に於いて原子物理學の新しき極めて意味深い展開の劈頭に立てるものといふことができやう。(1)

Heisenberg は是れらの困難を强調して"Über quantentheoretische Umbentung Kinematischer und mechanischer Beziehung"(2) なる論文に於いて力學的形像に附隨する困難を取り除けやうとして合理的な量子力學への

重要なる一歩を踏みだしたのであつた。これによつて今日量子力學の基礎は與へられたのであつて,今其の目まぐるしい發展の途上にある。

以下は是の理論の極めて概略的な紹介にすぎない。

§ 1. Heisenberg の企圖。Matrizenmechanik.

もと私たちの古典力學には其の根柢に,各質點は空間に於いて連續的な曲線を畫くものであるといふ時間·空間表象がよこたわつてゐた。併しこの古典的な表象は先天的な思惟必然性ではなくして,むしろその物理學的根據は經驗的な事實にあつたと見るべきである。即ち其の直接的な根據は物體の位置,運動の觀測が可能であるといふところにあるのである。そうして而かも私たちの素朴な經驗に於いてあらはれるものは所謂質點ではなく,相當の大いさを持つた物體である。だから所謂質點乃至其の位置運動を觀測し得ない物體に關するかぎり,かゝる如上の表象に從はふとすることは明らかに直觀性を超へてゐて素朴的には認容せられ得ないと言はなければならない。この際かうした物體の直觀性を豫期し,從つてまた古典論的表象を認容し得るのはかゝる表象を基礎として生じた物理學理論が其れ自身論理的であり,經驗的事實の說明に適用せられ得る場合であつて,そうして其の場合に限られてゐる。であるからかゝる場合以外に於いてはかやうな古典的表象を放棄し得る可能の根據が與へられたと考へることができやう。

電子はまさにかやうなものなのであつて, Heisenberg は舊力學とは反對に,かゝる電子に空間時間的記載を與へず,むしろ原子の定常狀態の Energie, 吸收及び發散にあらはれる振動數,兩定常狀態間の轉移確度の如き觀測可能の量の間の關係のみを言ひ表す,新しき量子力學を

たてやらうとした。

かやうに新しい量子論では電子に時間の函數としての空間點を與へ得ないけれども,電子に Ausstrahlung を附與し得ることは古典論と同じある。此の輻射はまづ第一に振動數によつて記載せられる。これは量子論的には

$$\nu(n,\ n-\alpha)=\frac{1}{h}(W(n)-W(n-\alpha)) \tag{1}$$

なる形式に,古典論的には

$$\nu(n,\ \alpha)=\alpha\nu(n)=\frac{1}{h}\frac{dW}{dn}\quad (nh=J:\text{kanonische Konstant})$$

この結合法則は

古典論的には

$$\nu(n,\ \alpha)+\nu(n,\ \beta)=\nu(n,\ \alpha+\beta)$$

量子論的には

$$\nu(n,\ n-\alpha)+\nu(n-\alpha,\ n-\alpha-\beta)=\nu(n,\ n-\alpha-\beta),$$

又は　$$\nu(n-\beta,\ n-\alpha-\beta)+\nu(n,\ n-\beta)=\nu(n,\ n-\alpha-\beta)$$

輻射の記載に必要なる第二のものは Amplitude である。是れは

量子論的には

$$\mathrm{Re}\{\mathfrak{A}(n,\ n-\alpha)e^{2\pi i\nu(n,\ n-\alpha)t}\}$$

(2)　古典論的には

$$\mathrm{Re}\{\mathfrak{A}_\alpha(n)e^{2\pi i\nu(n)\alpha t}\}$$

是を言葉で言ひ表すならば次のやうに意味付けられる:nの狀態にある澤山の原子から $n-\alpha$ の狀態への轉移によつて單位時間に自發的に發射せられる振動數 $\nu(n,\ n-\alpha)$ の輻射は,各原子に electric Moment $\mathfrak{A}(n,n-\alpha)e^{2\pi i\nu(n,\ n-\alpha)t}$ が存在するときに古典的電磁力學的に計算せられるところのものそのものであると。從つて轉移確度を $A(n,\ n-\alpha)$ とすれば $A(n,\ n-\alpha)h\nu(n,\ n-\alpha)=\{2\pi\nu(n,\ n-\alpha)\}^4|\mathfrak{A}(n,\ n-\alpha)|^2/3c^3$ となるので

あつて $\mathfrak{A}(n, n-\alpha)$ は Spektrallinie の強度, polarization を決定する。この對應は Kramers, Hisenberg の光分散論に於いて其れの對應的考察のうちに見られるものであるが, Heisenberg はこの考察に更に原理な一歩を次のやうに加へたのであつた。さて(2)の後者は古典論に於いて電子運動の Fourier Component として現れる。(即ち運動が週期なる否かに從つて夫々

$$x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha}\mathfrak{A}_{\alpha}(n)e^{2\pi i\nu(n)\alpha t}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}{}_{\alpha}(n)e^{2\pi i\nu(n)\alpha t}d\alpha$$

である。) 言ひ代へれば古典運動學に特性的なものとして,電子の運動學的敍述に於ける各項をなすものなのである。上記の「原理的な一歩」とは,このことに對應して量子論で(2)の前者について,之をいかにして運動學的敍述の一分素たらしむべきか,を問題とするところに存する。これは量子論的運動學をいかに構成すべきかの問題である。玆に於いて Heisenberg は古典論に對應して

(3)　$$\mathfrak{A}(n, n-\alpha)e^{2\pi i\nu(n, n-\alpha)t}$$

の全體を以て古典論的量 $x(t)$ を表す量子論的量と考へることに依つて運動の量子論的記載を得たのであつた。

次ぎに $x(t), y(t), x(t)+y(t), x(t)\times y(t)$ を夫々 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ で Characterise すれば,

古典論的には

$$\mathfrak{C}_{\alpha}(n)e^{2\pi i\nu(n)\alpha t}=(\mathfrak{A}_{\alpha}(n)+\mathfrak{B}_{\alpha}(n))e^{2\pi i\nu(n)\alpha t}$$

$$x(t)+y(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha}\,\mathfrak{C}_{\alpha}(n)e^{2\pi i\nu(n)\alpha t}$$

$$\mathfrak{D}_{\beta}(n)e^{2\pi i\nu(n)\beta t}=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha}\,\mathfrak{A}_{\alpha}(n)\mathfrak{B}_{\beta-\alpha}(n)e^{2\pi i\nu(n)(\alpha+\beta-\alpha)t}$$

——(紹　介)——

$$x(t)y(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\beta}\,\mathfrak{D}_{\beta}(n)e^{2\pi i\nu(n)\beta t}$$

量子論的には

$$\mathfrak{C}(n, n-\alpha)e^{2\pi i\nu(n,\, n-\alpha)t}=\mathfrak{A}(n,\ n-\alpha)+\mathfrak{B}(n,\ n-\alpha)\,)e^{2\pi i\nu(n,\, n-\alpha)t}$$

(4) $$\mathfrak{D}(n, n-\beta)e^{2\pi i\nu(n,\, n-\beta)t}=\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha}\,\mathfrak{A}(n, n-\alpha)\mathfrak{B}(n-\alpha,\ n-\beta)e^{2\pi i\nu(n,\, n-\beta)t}$$

(振動數の結合法則を考へて)

の全體を以つて表すことにする。從つて $x(t)y(t)$ に相應する量子論的量は一般には $y(t)x(t)$ の其れに等しくないのである。かくして私たちは $x^2(t)\cdots x^n(t)$ に相應する量子論を知ることができ,從つて $x(t)$ の冪級數に展開できる,任意の函數を量子論的に表すことができる。同様に $x(t)$ の t についての微方係數 $\dot{x}(t)$ は量子論的には

(5) $$2\pi i\nu(n,\ n-\alpha)\mathfrak{A}(n,\ n-\alpha)e^{2\pi i\nu(n,\, n-\alpha)t}$$

の全體にて表される。

以上量子論的 Kinematik の考察を終へた後,量子論的 Mechanik に移らねばならない。即ち力が與へられたるときいかにして $\mathfrak{A}$, ν, W を決するかを問題にするのである。是れまでの理論ではこの力學的問題は次の二段階に分けて解決せられてゐた。

1. 運動方程式

(6) $$\ddot{x}+f(x)=0$$

の積分。

2. (7) $$\oint p\,dq=\oint m\dot{x}\,dx=\mathrm{J}(=nh)$$

に依つて週期運動に於ける常數の決定 (Quantenbedingung)

私たちが量子力學をでき得る限り古典論と類似的に構成しやうと試みるならば 1. なる運動方程式を其のまゝ量子論に移すことが最も手近かであらう。但しこの際 $\ddot{x}+f(x)$ としては古典論的量の代りに其

れらを表すところの量子論的量(上に記述したやうな)を用ひなければならない。

次に常數の量子論的決定,週期運動について古典論では

(8) $$J=\oint m\dot{x}dx=\oint m\dot{x}^2dt=(2\pi)^2m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha}\,\mathfrak{A}_{\alpha}(n)\mathfrak{A}_{-\alpha}(n)\alpha^2\nu(n)$$

$$=(2\pi)^2m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha}\,|\mathfrak{A}_{\alpha}(n)|^2\alpha^2\nu(n)\qquad (x(t)\text{ が real のとき})$$

從來此の作用積分は h の整數倍に等しいと置かれたのであるが,Bohr の相應原理の立場よりすれば,舊理論からしても,此は任意であつて,ある任意の常數を除いて h の整數倍であるとして宜い。だから

$$\frac{d}{dn}(nh)=\frac{d}{dn}\oint m\dot{x}^2dt$$

とするのがよいであらう。即ち

(9) $$h=(2\pi)^2m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha}\,\alpha\frac{d}{dn}(\alpha\nu(n)\,|\mathfrak{A}_{\alpha}|^2)$$

そこで觀測可能な量のあひだに成立する(9)に相應していかなる量子論的關係を定むべきであらうか。$W(n)-W(n-\alpha)$ が $\alpha\frac{dW}{dn}$ に對應し,$\alpha\nu(n)\,|\mathfrak{A}_{\alpha}|^2$ には $\nu(n,\,n-\alpha)\,|\mathfrak{A}(n,\,n-\alpha)|^2$ が對應することを考へてみると

(10) $$h=2\pi^2m\sum_{-\infty}^{\infty}{}_{\alpha}\left\{|\mathfrak{A}(n+\alpha,\,n)|^2\nu(n+\alpha,\,n)-|\mathfrak{A}(n,\,n-\alpha)|^2\nu(n,\,n-\alpha)\right\}$$

となるであらう。Heisenberg によれば是れを用ひて $\mathfrak{A}$ を決定するに際し $\mathfrak{A}$ のうちで決定のできない常數は,輻射の起らないところの基準狀態がある,といふ條件からきまる。是れは基準狀態を n_0 で表せば

$$\mathfrak{A}(n_0,\,n_0-\alpha)=0\qquad(\alpha>0)$$

とならねばならぬからである。

かやうな(6),(10)なる二つが量子論の計算法則なのである。斯くして私たちは,古典力學に於いて質點の運動に對する古典論的表象が力

學法則に連關したやうに,定常狀態,量子的飛躍の表象が量子力學の基礎法則のうちに結び付いたことを見るであらう。併しこの理論が論理的ならんがためには,一般に (6), (10) なる方程式が Energeintegral $m\frac{\dot{x}^2}{2}+U(x)=\text{Const.}$ に相應するか否か,そうしてまたかくして得られた Energie が計算されたる ν に對して $\triangle W=h\nu$ なる條件を滿足するか否かが檢討せられねばならなかつたであらう。Heisenberg は是れに對する解答を anharmonishe Oszillator, Rotator のやうな簡單な例に於いて與へ得たのであるが,もつと複雜な場合については此の方法をもつと徹底さすための數學的發展を必要としたのであつた。そうして實際其の後いくばくならずして Born und Jordan[(3)] 及び Born Heisenberg und Jordan[(4)] の Matrizenformulierung があらはれると共に Heisenberg の豫期はたしかめられたのであつた。

定常狀態を表はす數 n_0 を 0 とすれば, Hoisenborg に依つて定義せられた Coordinate q の量子論的量は次の Scheme に表し得られる,

$$
(11)\qquad \mathrm{q}=\begin{cases} q(00) & q(01)e^{2\pi i\nu(01)t} \quad q(02)e^{2\pi i\nu(02)t}\cdots\cdots \\ q(10)e^{2\pi i\nu(10)t} & q(11) \quad q(12)e^{2\pi i\nu(12)t}\cdots\cdots \\ q(20)e^{2\pi i\nu(20)t} & q(21)e^{2\pi i\nu(21)t} \quad q(22)\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \end{cases}
$$

茲に $q(nm)$ は狀態 m から狀態 n への轉移確度を決定するものであり, $\nu(nm)$ は其の際吸收又は發散に於いて現れる振動數である。斯ゝる量の Hiesenberg による積及び和(4)の定義を見ると,是は Matrix の演算と同じあることがわかる。そこで

1. 量子論的量は Matrix として言ひ表される。古典的相當量が實數なるとき,其のときに相應して量子論量は Hermitische Matrix である。

即ち　　$q(nm)=\overset{*}{q}(mn)$

——(紹　介)——

* は Conjugate imaginary を表す。

2. 微分算。time についての Differentiation は(5)によつて

(5')
$$\dot{q}=\{2\pi i\nu(nm)q(nm)e^{2\pi i\nu(nm)t}\}$$

x_1, x_2,……x_n を量子的量, $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ を乗法,加法を經て x_1,……x_n から導かれた函數とするとき, $f(x)$ の x についての微分係數を次のやうに定義する。

(12)
$$\frac{\partial x}{\partial f_\nu}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x_1\cdots,x_\nu+\alpha\mathbf{1},\cdots x_n)-f(x_1,x_2,\cdots x_\nu,\cdots x_n)}{\alpha}$$

茲に

$$\mathbf{1}=(\delta_{mn})\qquad \delta_{mn}=\begin{cases}1 \text{ für } m=n.\\ 0 \text{ für } m\neq n.\end{cases}$$

3. 舊力學に於ける Impuls p を表すものとして量子論的に $\mathbf{p}$ とすると,

(13)
$$pq-qp=\frac{h}{2\pi i}\mathbf{1}\qquad h=\text{Planck's Const.}$$

が成立するものとする。即ちかゝる關係に於いて Kanonisch konjugierte Variable を定義する。

4. Kanonische Gleichung. $\mathbf{H}(pq)$ なる Hamiltonian に對して力學變數は kanonische Gleichung

(14)
$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\qquad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$$

を滿足しなければならぬとする。

以上が Matrizenmechanik (但し自由度は1)の計算規則であつて,是れから容易に Frequenz の結合法則を用ひて, $\dot{\mathbf{H}}=0$, 從つて nichtentartete System 即ち $\nu(nm)$ が $n\neq m$ のとき零でない system に對しては

$$\mathbf{H}=(H_n\delta_{nm})$$
$$h.\nu(nm)=(H_n-H_m)$$

を證明することができる。かくて Heisenberg の豫期がたしかめられ

——(紹 介)——

たことになる。その證明。

Frequency の Kombinationsregel から $\nu(mn)h = W_n - W_m$. そうすると

(a)　　$\dot{q} = -\frac{2\pi i}{h}(\mathbf{W}q - q\mathbf{W})$.　茲に　$\mathbf{W} = (W_n \delta_{nm})$

一般に任意の函數 f(pq) に對して

(b)　　$fq - qf = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial f}{\partial p}$,　$pf - fp = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial f}{\partial p}$

何故ならば,(13) により是れは p, q について成立する。そうして任意の二つの函數 a, b に關して成立するとき其の積,和 ab, a+b についてなり立つことが容易にわかるからである。特に f=H のときには (14) と (a) とに依つて

(c)　　$\mathbf{W}q - q\mathbf{W} = \mathbf{H}q - q\mathbf{H}$, $\mathbf{W}p - p\mathbf{W} = \mathbf{H}p - p\mathbf{H}$.

或ひは　　$(\mathbf{W} - \mathbf{H})q = q(\mathbf{W} - \mathbf{H})$, $(\mathbf{W} - \mathbf{H})p = p(\mathbf{W} - \mathbf{H})$

從つて H(pq) について　$(\mathbf{W} - \mathbf{H})\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{W} - \mathbf{W})$

即ち　$\mathbf{WH} - \mathbf{H}w = 0$　　即ち　$\dot{\mathbf{H}} = 0$

(c) から　$q(nm)(W_n - W_m) = q(nm)(H_n - H_m)$,　從つて　$H_n - H_m = W_n - W_m = h\,(nm)$

逆にエネルギー定律と Frequenzbedingung を正しいと前提して, Energie 函數 **H** が Kanonische Variable $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$($\mathbf{PQ} - \mathbf{QP} = \frac{h}{2\pi i}1$) の函數であるとき, Kanonische Gleichung

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{Q}}$$

の成立を證明することができる。これは (a) と (b) とから明らかである。此の事實に基き, kanonische Transformation なる概念を導き入れることに依つて量子力學的問題の積分に關して下の重要なる結果に達する。

p, q を **P, Q** に變換するに際し

$$pq - qp = \mathbf{PQ} - \mathbf{QP} = \frac{h}{2\pi i}1$$

が滿足せられるとき,是れを kanonische Transformation と名づけ,是れは一般に

—(紹 介)—

(15) $$\mathrm{P}=\mathrm{SpS},\qquad \mathrm{Q}=\mathrm{SqS}^{-1}\qquad \mathrm{SS}^{-1}=1$$

で表はされる。(5) 但しSは任意の Matrix を表してゐる。さうすると與へられたる H(pq) に對する Kanonische Gleichung の積分問題を次のやうに言ひ表し得る。

$$\mathrm{p}^0\mathrm{q}^0-\mathrm{q}^0\mathrm{p}^0=\frac{h}{2\pi i}1$$

を滿足する任意の p^0, q^0 なる Variable をもつて來て,

(16) $$\mathrm{H}(\mathrm{pq})=\mathrm{SH}(\mathrm{p}^0\mathrm{q}^0)\mathrm{S}^{-1}=\mathrm{W}$$

但し W は Digonalmatrix i. e. $W_{mm}=\begin{cases}1 \text{ für } m=n\\ 0 \text{ für } m\neq n.\end{cases}$

なるやうな函數Sを決定する。さうすると kanonische Gleichung の解は

(17) $$\mathrm{p}=\mathrm{Sp}^0\mathrm{S}^{-1},\qquad \mathrm{q}=\mathrm{Sq}^0\mathrm{S}^{-1}$$

となる。

以上は自由度が1の場合であるが,さうでない一般の場合には Kanonische Variable の交換規則が次のやうになる。

(18) $$\mathrm{p}_r\mathrm{p}_s-\mathrm{p}_s\mathrm{p}_r=0,\qquad \mathrm{q}_r\mathrm{q}_s-\mathrm{q}_s\mathrm{q}_r=0$$

$$\mathrm{p}_r\mathrm{q}_s-\mathrm{q}_s\mathrm{p}_r=\begin{cases}0 & \text{für } r\neq s\\ \frac{h}{2\pi i}1 & \text{für } r=s\end{cases}$$

$$r=1,\cdots\cdots\cdots n$$

$$s=1,\cdots\cdots\cdots n$$

kanonische Gleichung は

(19) $$\dot{\mathrm{p}}_r=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{q}_r},\qquad \dot{\mathrm{q}}_r=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{p}_r}\qquad (r=1,\cdots n.)$$

是の場合も一自由度の時と同樣な上記の如き結論が得られる。こゝで問題となるのは積分が可能であるか,積分は一義的であるか,即ち解は p^0, q^0 のとりかた ((16), (17) 參照) に無關係に一義的なるか,さうし

てまた定つた p^0, q^0 について一義的なるか,といふことである。一義性の問題については次のやうに言ひ得られる。

いかなる Orthogonal Matrix $\mathbf{S}$—— 是れについては

$$\mathbf{S}\tilde{\mathbf{S}}^* = 1, \qquad \tilde{\mathbf{S}}^*\mathbf{S} = 1, \qquad \tilde{S}(nm) = S(mn) \tag{20}$$

が成立する——をとつて,交替規則 (18) を滿足する hermitsche Matrix p^0_k, q^0_k に對して $\mathbf{SH}(p^0q^0)\mathbf{S}^{-1}$ を Diagonalmatrix, 即ち

$$\mathbf{SH}(p^0q^0)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{W} \quad \text{(Diagonalmatrix)}$$

を成立せしめやうとも, $\mathbf{W}$ は一義的に定まる。そうして

$$p_k = \mathbf{S}p^0_k\mathbf{S}^{-1}, \qquad q_k = \mathbf{S}q^0_k\mathbf{S}^{-1}$$

によつて得られる p_k, q_k は phase を除いては決定せられる(但し nichtentartung の場合)

何故と言ふに,若し $\mathbf{W}$ が一義的にきまらぬ(ある p^0q^0 に對して)とすれば,即ち

$$\mathbf{TH}(p^0q^0)\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{W}' \quad (\text{但し } \mathbf{T} \text{ は Orthogonal})$$

とすれば $\mathbf{SH}(p^0q^0)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{W}$ に對して

$$\mathbf{W}' = \mathbf{MWM}^{-1} \qquad (\mathbf{M} = \mathbf{TS}^{-1}),$$

從つて

$$\mathbf{WM} - \mathbf{MW}' = 0$$

或ひは

$$M(nm)(W'_n - W_m) = 0, \tag{21}$$

(20) から

$$\sum_k |M(nk)|^2 = \sum_k |M(kn)|^2 = 1 \tag{20'}$$

だから任意の n に對して $M(nm) = 0$ となり得ない m が存在し得なければならない從つて W'_n は (W_m) の中に含れる,同様にして W_m は (W'_n) の中に含れればならない。即ち $\mathbf{W}$ は一義的にきまる。Nichtentartung の場合には W_n は全部異つてゐなければならぬ。從つて (21) から $M(nm) = 0$ にならぬものは各 n について只一つである(但し $W' \neq W$ であるとして)。今 $\mathbf{S}, \mathbf{T}$ によつて p^0q^0 から得られる Canonic Variable を夫々 pq, $p'q'$ とするならば,

——(紹介)——

$$p' = MpM^{-1}, \quad q' = MqM^{-1},$$

即ち $$p'(nm) = \sum M(nk)p(kl)M^{-1}(lm) = M(n\bar{m})p(\bar{u}\bar{n})\overset{*}{M}(m\bar{n})$$

故に $$|p'(nm)| = |M(\bar{n}\bar{m})||p(\bar{m}\bar{n})||\overset{*}{M}(m,\bar{n})| = p(\bar{m}\bar{n})|\ [\text{Vgl. } (20')]$$

更に W′=W なるときには

$$q' = NqN,\ p' = NqN,\ w' = NwN = w$$

即ち $wN - Nw = 0$, 故に $\dot{N} = 0$, 従つて Nichtentartung の場合 N は Diagonalmatrix である。だから

$$q'(nm) = q(nm)S_nS_m^{-1},\ p'(nm) = p(mn)S_nS_m^{-1}$$

hermitic なるためには $|S_nS_m^{-1}| = |S_mS_n^{-1}$, 即ち $|S_n| = S_m|$ であつて

$$|q'(mn)| = |q(nm)|$$

(出發の $p^0\ q^0$ に無關係に一義的なることは明らかである。何故と言ふに,今 $\bar{p}^0, \bar{q}^0$ から出發したときを考へると, $\bar{p}^0 = Ap^0A^{-1}$, $\bar{q}^0 = Aq^0A$, である。$SH(p^0q^0)S^{-1} = w$ の中へ $\bar{p}^0, \bar{q}^0$ の代りに p^0, q^0 を入れると,

$$BH(\bar{p}^0\bar{q}^0)B^{-1} = w,\ \text{但し } B = SA^{-1},$$

同様に $$B\bar{p}_k{}^0B^{-1} = p_k\quad B\bar{q}_k{}^0B^{-1} = q_k$$

となるからである。)

次に積分が可能なりや否やについて下のことが言へる。積分問題を hermitische quadratische Form の主軸變換と結び付けることができ,二次形の固有値が Energie を表すとのとすることができるのである。かくて積分可能に關する命題はかゝる二次形の主軸變換可能に關するそれに移る。この數學的理論は從來 unendliche Matrix については所謂『beschränkte Form』なる特殊なもののみ見出されてゐるのであるが,其の主軸變換に於いて W_n の Reihe が連續的な領域をとり得ることが知られゐる。これは物理學に於ける連續的な Termspektrum に相應するものであつて,連續的 Spektra の量子論的取扱の道がひらかれるのである。

Entarung の場合には $\dot{H} = 0$ は成立しても H が Diagonalmatrix である

──(紹介)──

といふわけにはいかない。従つて Frepuenzbedingung が結果しない。此のときには H はDiagonalmatrix であるといふことを上記の基礎法則に附け合へれば宜い。この場合に關しては餘り立ち入らないで置く。

§ 2. q-數の理論。

前節に於いて看取せられるやうに Matrizenmechanik は週期的乃至多週期的運動を取り扱ふのには充分である。併し乍らかゝる運動の解析的取り扱ひに於いて用ひられる座標は時間の週期的乃至多週期的函數として表し得るやうなものに限られてゐる。polar coordinate φ, r の如きものを前節の Heisenberg の Matrix に表すことは不可能であり,また舊力學に於いて運動のとり扱ひを最も簡單ならしめたところの Winkelvariable Wirkungsvariable に對する其れも不可能である。また,例へば最も簡單な,然し最も aperiodic な一樣直線運動は Matrizenmechaink の及び得る範圍以外にあると見なければならなかつた。だから斯る解析的の取り扱ひに於ける制限をとりのけ,非週期的運動をも完全に理論のうちにとり入れるためには, Heisenberg の Matrix の一般化が必要であるであらう。此の一般化は Dirac, Jordan の後の業績のうちに見出される。

玆に記さうとする, q-數の理論は Dirac[6] によつてなされたものであつて,是れは非週期的運動の形式的處理を許し,並びに Winkelvariable Wirkungsvariable の導入を可能ならしむるものである。

Dirac は力學系を記載する Variable を考へ,是れに記號的の演算を zuordnen し,其の演算は乘法の交換法則を滿足しないとし,是れを q-Number と名付けた。此れは普通の Number ではない。(彼は普通の Number を c-Number といふ名前で呼んでゐる。)

Dirac によれば,現在私たちはこの q-數がどんなものであるかを彷彿せしめるわけにはゆかない。この q-數については greater or less

の關係を主張し得ないといふのである。知り得ることは二つの數 Z_1 と Z_2 と(ひとつが q－數, ひとつが C－數であつても宜い)に對して一般に q－數であるところの, Z_1+Z_2, Z_1Z_2, Z_2Z_1 なる數が存在するといふことだけである,と言ふのである。乘法の交換法則以外の代數法則を滿足するといふことを除いては,この數が如何にして構成せられるかを,何等知らない。

力學系の位置座標を $q_1 \cdots\cdots q_n$, Impluskoordinaten を $p_1 \cdots\cdots p_n$ とするとき,此れらに對して次の演算を zuordnen する。

(1)
$$q_r q_s - q_s q_r = 0$$
$$p_r p_s - p_s p_r = 0$$
$$p_r q_s - q_s q_r = \frac{h}{2\pi i}\delta_{rs}$$

(量子論的變數の古典論のそれと異なるのは最後の方程式に h の現れることであつて h が無視し得られる範圍で古典論が Asymptotic に妥當することが示されてある。)

$\dot{x}$ を time t についての微分係數とするとき, x が dynamical Variable p, q の任意の函數なる場合に,

(2)
$$\dot{x} = \frac{2\pi}{ih}(x\mathrm{H} - \mathrm{H}x)(\equiv [x, \mathrm{H}])$$

とする。

次に多週期的 System を考へる。玆に多週期的系とは,次の性質を有する, Variable Pair J_r, W_r の存在するやうな力學系を言ふのである。

(i) 是等 J_r, W_r は Canonical である。即ち
$$[J_r J_s] = 0, \qquad [w_r w_s] = 0$$
$$[w_r J_s] = \delta_{rs}$$

(ii) Hamiltonian H は J'_s のみの函數,

――(紹 介)――

(iii) Original Pair p'_s, q'_s は w'_s について1を週期にもつ週期函數である。即ち次の形に書き表されるとする。

$$\sum_a C_a exp\, 2\pi i(\alpha w)$$

若しくは　　$$\sum_a exp\, 2\pi i(\alpha w)\, C'_a$$

玆に $(\alpha w)=\alpha_1 w_1 \cdots\cdots + \alpha_n w_n$, C_a, C'_a は J'_s のみの函數, α'_s は Integer.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots\cdots$$

さて

(3)　$$x=\sum_a x_a e^{2\pi i(\alpha w)} = \sum_a e^{2\pi i(\alpha w)} x_a'$$

とすれば $x_a(J_r)=x_a(J_r+\alpha_r h)$ にして,

(4)　$$x=\sum_a x\alpha 2\pi i(\alpha\omega) e^{2\pi i(\alpha w)} = \sum_a e^{2\pi i(\alpha w)}\, 2\pi i(\alpha\omega)' x_a'$$

となる。玆に

$$(\alpha\omega)h = H(J_r) - H(J_r - \alpha_r h)$$

$$(\alpha\omega)'h = H(J_r + \alpha_r h) - H(J_r)$$

何故ならば,一般に　$[\omega_s{}^n J_r] = \delta_{rs} n\omega^{n-1} = \dfrac{\partial \omega_r{}^n}{\partial \omega_r}\delta_{rs}.$

從つて　$i\dfrac{h}{2\pi}[e^{2\pi i(\alpha\omega)}, J_r] = e^{2\pi i(\alpha\omega)}J_r - J_r e^{2\pi i(\alpha\omega)} = -h\alpha_r e^{2\pi i(\alpha\omega)}$　即ち

$e^{2\pi i(\alpha\omega)}J_r = (J_\gamma - \alpha_r h)e^{2\pi i(\alpha\omega)}$　從つて一般に

$e^{2\pi i(\alpha\omega)}x(J_r) = x(J_r - x_r h)e^{2\pi i(\alpha\omega)}$　そうして

$\dfrac{d}{dt}e^{2\pi i(\alpha\omega)} = \dfrac{2\pi}{ih}[e^{2\pi i(\alpha\omega)}H - He^{2\pi i(\alpha\omega)}] = 2\pi i(\alpha\omega)e^{2\pi i(\alpha\omega)} = 2\pi i e^{2\pi i(\alpha\omega)}(\alpha\omega)'$

今 q−數についても C−數と同様に記號的に Conjugate imaginary なるものを考へ, x, J を real と見, $\bar{x}_a$ を x_a の Conjugate imaginary を表すとしたとき, (3) の兩邊の Conjugate imaginary をとることに依つて

(3')　$$x=\sum_a e^{-2\pi i(\alpha w)}\bar{x}_a(J_r) = \sum_a \bar{x}_a(J_r+\alpha_r h)e^{-2\pi i(\alpha w)}$$

──(紹　介)──

(3) と比較して

(5) $$\overline{x}_\alpha(J_r+\alpha_r h)=x_{-\alpha}(J_r)$$

是の關係をもつと明瞭に表すために, $x_\alpha(J_r)$ の代りに $x(J, J-\alpha h)$ と書くことにすれば,上の關係 (5) は

$$\overline{x}(J+\alpha h,\ J)=x(J,\ J+\alpha h)$$

(3) は

(3″) $$x=\sum_\alpha x(J,\ J-\alpha h)e^{2\pi i(\alpha\omega)}=\sum_\alpha e^{2\pi i(\alpha\omega)}x(J+\alpha h,\ J)$$

$$(\alpha\omega)(J)=\omega(J,\ J-\alpha h)$$

$$(\alpha\omega)'(J)=\omega(J,\ J+\alpha h)$$

と denote すれば. (4) は

(4″) $$\dot{x}=\sum_\alpha x(J,\ J-\alpha h)2\pi i\omega(J,\ J-\alpha h)e^{2\pi i(\alpha\omega)}=\sum_\alpha e^{2\pi i(\alpha\omega)}$$
$$\times\alpha\pi i\omega(J,\ J+\alpha h)x(J+\alpha h,\ J)$$

更に y を考へて,同様に是れを展開することに依つて,そうして掛算をへて

(3, a) $$y=\sum_\beta y(J,\ J-\beta h)e^{2\pi i(\beta\omega)}$$

(6) $$xy=\sum_{\alpha\beta}x(J,\ J-\alpha h)y(J-\alpha h,\ J-\alpha h-\beta h)e^{2\pi i((\alpha+\beta)\omega)}$$

即ち xy の Amplitude は

(6′) $$xy(J,\ J-\gamma h)=\sum_\alpha x(J,\ J-\alpha h)y(J-\alpha h,\ J-\gamma h)$$

そこで $x(J, J-\alpha h)$, $\omega(J, J-\alpha h)$ を J'_s のみの函数と見て, J_r の代りに $n_r h$ を代入する,そうして得られる C-数を夫々 $x(n,\ n-\alpha)$, $\omega(n,\ n-\alpha)$ とする。そうして $x(n, n-\alpha)exp2\pi i\omega(n, n-\alpha)t$ の集り (n は順次 1 だけちがふ integer の系列をとるとして充分)を以て q-數 J_r のすべての値に對する q-數の値を表すと考へる。從つて $\dot{x}$ の values は $\dot{x}(n,\ n-\alpha)exp2\pi i\omega(n,\ n-\alpha)t$ の aggregate で表される。(4′) に依つて

(7) $$\dot{x}(n,\ n-\alpha)=2\pi i\omega(n,\ n-\alpha)x(n,\ n-\alpha)$$

──(紹 介)──

そうして(6')は

$$xy(n,\ n-\gamma)=\sum_{\alpha} x(n,\ n-\alpha)y(n-\alpha,\ n-\gamma) \tag{8}$$

上のやうにして q-数を,量子論的量をC-數で表すことができた。そうして是れは§1.に於けるHeisenbergの量子論的量の表し方と全く同一であることを看取し得るであらう((7), (8))。併し以上は多週期systemを前提としたのだから,かゝる限りに於いて上の假定——J_rなるq-数をC-數 $n_r h$でおきかへる——は理論に得られた形式的な結果を,C-數であるところの實驗的結果との比較を可能ならしめるのである。元來q-數の理論は此れ以外の非週期系にも適用することを妨げない。そうして其のときに於いてもq-數をいかにC-數によつて表すべきか,即ちq-Zahlの理論から得られた式を物理的に解釋せんがためには——そうして此のことは實測的結果がC-數である故に必要である——mehrfach periodische Systemのときと類似の操作が假定せられねばならないであらう。蓋し何か是の操作に對する一般的原理が知られなければ,此のq-Nmmberの理論で形式的にaperiodic systemを取り扱ひ得てもそれは何ら物理的意義を持たないからである。是のことは,q-Numberの理論には運動方程式(2), kanonical relation(1)の外に何等か他の原理を必要とすることを意味してゐる。こゝにmehrfach periodischのときにはJを任意のC-數ではなく,hのIntegral Multipleと置いたのであつて,特にかゝるQuantelungを必要としたのであつた。力學的量をMatrixで表すことを前提せるHeisenbergの方法ではかゝるQuantelungを必要としなかつたので,こゝに新しくあらはれたことなのである。かゝるQuantelungは何を意味するのであるか,そのところに何等かの物理學的意義が把握せられねばならない,と考へられるやうである。

Quantelungの意義はSchrödimgerの理論のうちに見出される。是れ

は Heisenberg とは全く異つた根本から生れ出たものであつて,次に其の梗概に移らう。

§3. L. de Broglie の位相波。Schrödinger の波動力學。

光量子說は光(振動數ν)に Energie $h\nu$, Imwpuls $h\nu/c$ (方向は光の進む方向, c は光の速さ)をもつて動く微粒子的存在を假定する。特に Compton 効果が其の麗しき支柱たることはよく知られてゐることである。併し乍ら光はまた他方,干渉現象などに於いて波動的性質を持つてゐることを示してゐる。L. de Broglie[7] は物質的微粒子,電子に對してかゝる『微粒子-波動』の二重性を考へやうとして,電子はある波動の場を伴ふものであるとした。即ち質量 m_0 の particle に

$$E_0 = m_0c^2 = h\nu_0$$

にて定められる振動數 ν_0 を附與した。いま particle があるガリレエ基準體に於いて靜止してゐるとする。其の時此の system に於いて到るところ synchroneous な振動數 ν の振動を考へるのである。此の system (K′) に對して一樣な速度 v で動く今一つの system K から考へると,これは振動數が $\nu = \frac{1}{h}m_0c^2\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, 速度 $V = \frac{c}{\beta}$ ($\beta = \frac{v}{c}$, c は light speed) の波動をなして mass m が進む方向へ傳播するものとして現れる。$\beta<1$ であるから,此の波動は Energie を運ばないのであつて,是れを Broglie は位相波と言つてゐる。K に對しては固有質量 m_0 の Energie は $E = m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}$ であるから $E = h\nu$ となる。位相速度を V とすれば $V = E/G$, (G は Impuls.) となる。即ち Energie E, Impuls G なる particle には

(1) $$E = h\nu, \qquad V = E/G$$

に依つて與へられる振動數ν,位相速度 V なる波動の場を伴ふものである。いま振動數 ν と $\nu+d\nu$ の間の振動數をもつ波が同一の方向に進むとき,其の速度が振動數に依つて變るときには干渉の結果所謂群

團波を造る。この group velocity U は

$$U=\frac{d\nu}{d\left(\frac{\nu}{V}\right)}$$

(1) からわかるやうに $U=v$, 即ち particle の速さに等しい。Energie の傳播速度は gronp velocityに相等しといふ光の波動論とに類似してゐる。

更に de Broglieは古典力學と光學との間の類似を(是れは以前 Hamilton に依つて旣に見出されたところのものであつた),即ち幾何光學に於ける Fermat の原理は力學と移すと Maupertuische Prinzip に外ならぬことを指摘した。其れと共にかの Sommerfeld の量子條件 $\oint pdq=nh$, 電子の畫く閉鎖曲線に沿つて一週期にわたつてとれる作用積分が Planck の Const. h の integral Multiple である,といふことは,軌道が位相の整數倍に等しいといふこととなり,丁度絲に起る定常波の生成若しくは共鳴條件と類似してゐることを示した。

Schrödinger[8] は de Broglie の波動場の考へを徹底した。

今簡單のために質量 m の particle が Conservative Field $V(x, y, z)$ 内を運動するときを考へる。Kinetic energy は

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\left(\frac{1}{2m}\right)(p_x^2+p_y^2+p_z^2)$$

となり,力學問題は Hamilton の偏微分方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\left(\frac{1}{2m}\right)\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\}+V(x, y, z=0 \tag{2}$$

を解くことに依つて解決せられる。是を解くために

$$W=-Et+S(x, y, z), \quad (E \text{ は Total energy}) \tag{3}$$

と置けば

$$|\operatorname{grad} W|=[2m(E-V)]^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

となる。上の方程式を幾何學に考へるために, (x, y, z) 空間に $W=\text{Const}$

なる Flächensystem を考へ,其れが時間と共にどう變るかを考へて見る。(3) に依れば Flächensystem 其のものは變らずに,各個々の面の常數が $|\partial W/\partial t|=|E|$ なる割合で時間と共に變化する,若しくは各面の W の値を固定したものと考へれば,各方面は時と共に面から面へと順々移り變つて行く,とみることことができる。ある面の time t に於いてとつた Const を W_0 とし,$t+dt$ に,此の面が W_0+dW_0 の面の位置をとつたとすれば,(4) から

$$\frac{dW_0}{dn}=[2m(E-V)]^{\frac{1}{2}}\quad dn\text{ は垂直距離}$$

となる。從つて面は

$$u=dn/dt=E/[2m(E-V)]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

の速さで面の Normal に沿つて移動してゆく。この狀態は光がひとつの波面から他の波面へと進んで行くのと全く同樣であつて, W は丁度波の位相に相應する。さて

$$p_x=m\dot{x}=\partial W/\partial x,\qquad \text{etc.}$$

であるから W 面の orthogonal Curve の切線は質點の速度の方向と一致する。即ち其れは質點の軌道である。

此のやうに幾何光學と力學とは全く類似のものである。そうして光の波長が infinite small のときにのみ幾何光學が當てはまるのであるから, Optik と Mechanik とのかやうな類同はかゝる限りに於いてのみ成立するのである。 de Broglie の Wellenbild に據れる, Schrödinger の基礎概念は光の波長が neglect し得ない場合にも斯かる類似をたてやうとしたところに存する。そうして幾何光學から波動光學への轉移に相應した書き換乃至一般化を古典力學に加へやうとした。de Broglie の位相波の波長に對して Bahnkurve の曲度半徑(古典力學から計算せる)が大きいとき,丁度幾何光學に於けると同じやうに古典力學が正し

物理化学の進歩 Vol. 2 No. 1 (1928)

き結果をあたへ,此れに反して Bahnkurve の曲度半徑が極めて小である古典力學から計算して)やうな運動に對してかゝる古典力學的記載は不可能であつて,光學に於いて波長が neglect し得ないやうな場合に必要な波動光學に相應して,波動力學的の取り扱ひを確立しなければならぬとしたのであつた。

$$\nu=\mathrm{E}/h,\ \lambda=u/\nu=h/[2m(\mathrm{E}-\mathrm{V})]^{\frac{1}{2}},\quad \mathrm{E}-\mathrm{V}=\frac{1}{2}mv^2$$

從つて $\lambda=h/mv$ となり a を曲度半徑とす $\lambda/a=h/mva$. 圓形軌道について mva は Drehimpuls であつて, Bohr の量子條件から,是れは h の order の大いさである。だから a は λ に comparable な大いさである。從つて Schrödinger の考へに依れば原子の領域では古典力學は拒否されねばならない。そうしてかゝる微細な System に對しては古典論の運動方程式の代りに波動方程式が與へられるのであつた。かく內原子的運動に對して古典論的な時間空間的記載をしりぞけたといふ點で囊の Heisenberg の力學と相通ずるものがある。

Schrödinger は上のやうな質點に對して,古典論(彼は是れを Geometrische Mechanik と名付けて居る)に於ける Hamilton の微分方程式(2) の代りに,次のやうな波動方程式を構成した。

$$\text{(6)}\qquad \left\{\frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial q_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial q_y^2}+\frac{\partial^2}{\partial q_z^2}\right)+\mathrm{V}(q)-\mathrm{E}\right\}\varphi(q)=0$$

或ひは
$$\left[\mathrm{H}\left(q,\ \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}\right)-\mathrm{E}\right]\varphi(q)=0,\quad \mathrm{H}\ \text{は Hamiltonian}$$

玆に $\varphi(q)$ は Schrödinger の wave の Amplitude を與へる。E は Constant である。 $\mathrm{S}=\frac{h}{2\pi i}\log\varphi$ と置けば, (6) は

$$\left\{\mathrm{H}\left(q,\ \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q}+\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}\right)-\mathrm{E}\right\}1=0$$

h を 0 に tend すれば Hamilton-Jacobi の微分方程式になる。

さて私たちはこの波動方程式から,全 q 空間に於いて連續性と一義

性 (Eindeutigkeit) を滿足するやうな解を求める。斯かる要請は數學的見地からして一般に, parameter E のどんな値に對しても滿足せられるといふことは不可能であつて是れの滿足せられるやうなEの特殊な値を當該微分方程式の固有値と言ひ,其の解を固有函數と名付ける。Schrödinger に依ればかゝる固有値が定常狀態に於いて原子の持つてゐる Energie に外ならぬのである。かくて量子論の問題は波動方程式の固有値問題に歸する。斯く如く Schrödinger の理論は Quantelnng の問題に於いて原理的に重要なる一步を達成したものであることを看取せられるであらう。蓋し Schrödinger の波動方程式の解の全 q－空間に於ける連續一義性なる要請から定常狀態の存在が導き出されるからである。

私たちはいま Schrödinger の Formalismus が其の出發點に於いて,其の方法に於いて,其の Mathemetische Apparate に於いて,いかに Heiserberg の其れと異なるかを見ないわけにはいかないであらう。Heisenberg にあつては古典論的の Variable は discrete な Zahlensystem—(Matrix) で置きかへられ,そうして其の matrizenelement は基礎法則から代數的に決定せられるのであつた。所謂 Dikontiniumstheorie であつたのである。其れに反して波動力學に於いてはまさに其の逆に古典力學から Kontiniumstheorie へ更に一步を進めたものと見ることができる。いはゞ兩者は古典論からの離反を diametral opposite の方向へ進めたのであつた。Schrödinger,[8] Eckart[9] は此の兩者間に密接な關係を見出し,形式的な數學的見地よりすれば, equivalent であることを結論したのであつた。蓋し(精しい記述は省く)固有値 E_n に對する固有函數を $\varphi_n(q)$ (精しく言へば normieren されたる)とするとき, Kanonische Variable に次の Matrix を zuordnen する。

──(紹 介)──

$$q_l(mn) = \int \varphi_n(q) q_l \varphi_m(q) dq \tag{7}$$

$$p_l(nm) = \frac{h}{2\pi i}\int \varphi_n(q) \frac{\partial \varphi_m(q)}{\partial q_l} dq$$

[一般には $f(pq)$ に對して

$$f(nm) = \frac{h}{2\pi i}\int \varphi_n(q) f\left(q, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}\right)\varphi_m(q) dq \tag{7'}$$

を zuordnen する]。さうするとこの Matrix が Heisenberg に於ける基礎法則を満足するが示めされた。かくて Heisenberg に於ける量子力學的問題の解法は Schrödinger の偏微分方程式の解法と,(7) の Quadrature とに歸せられる。從つて Matrix 乃至 q-Number に於ける計算上の困難が省かれるといふ,實用的意義が與へられることになる。また他方に於いて此れは Aperiodic な運動への量子力學の適用,並びに Heisenberg の理論の擴張への必要缺くべからざる見地を與へたのであつた。

上記固有値問題は定常狀態に關する敍述を與へるにすぎない。所謂量子的轉移の表象については尙波動函數と電磁場量との間に他の原理を必要する。そこでこの概略を終るにあたつて,先づ Schrödinger に依つてあたへられた Wellenfunktion φ の物理的意味を注意しやう。[10] (元來 schrödinger の波動場に何等の物理的意義を與へねばならぬことは,認識論的に必要的である)

Wellengleichung の固有函數を φ_n 固有値を E_n とする。是の波動に Time factor を考へに入れると波動の函數は

$$\varphi_n \exp[2\pi E_n t/h + \theta_n]i$$

故に一般の解は

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n \exp[2\pi E_n t/h + \theta_n]i \tag{8}$$

の real part になる。φ の Conjugate imaginary を $\overline{\varphi}$ で表すと,この絕對値の

自乘は

(9) $$\varphi\bar{\varphi}=\sum_{nn'}c_n c_n'\varphi_n\varphi_n'\cos[2\pi(E_n-E_n')t/h+\theta_n-\theta_n']i$$

となる。今一電子を考へる。そして電氣の荷電は一點に集中しては居らず全空間に $\varphi\bar{\varphi}$ に比例する密度をもつて分布されてゐるものとする。かやうに波動函數を荷電に對する Gewichtfunktion として物理的に意義づけるとき此の荷電の時間に對する變化の有様は(9)にて示され是れに依つて普通の電氣力學的に輻射される光を知ることができる。其のためには(9)の $\varphi\bar{\varphi}$ に x, y, z をかけ各體積分素に依る electric Moment として是れを積分(全空間にわたつて)すればよい。例へば z の方向に振動する光については

(10) $$\int\varphi\bar{\varphi}z\,dxdydz=2\sum_{nn'}c_n c_n'\cos[2\pi(E_n-E_n')t/h+\theta_n-\theta_n']i \times\int z\varphi_n\varphi_n'dxdydz$$

となる。かやうに全 electric element は Dipol を重ね加へたものであつて其ら個々の Dipol は harmonisch に E_n-E_n' なる Frequenz にて振動してゐる。此の Frequenz は Bohr の Frequenzbedingung からよく知られてゐるものである。Particular Frequency の emitted Radiation の強度は

$$c_n c_n'\iiint z\varphi_n\varphi_n'dxdydz$$

の自乘に比例することが普通の Elektrodynamik からは期待せられる。此の積分は(7)によつて明かな如く、Heisenberg の理論と關係づけたときでてきたところの, $z(nn')$ なる Matrix の element なのであつて是れはとりも直さず Heisenberg の Matrix であつたのである((7)を參照)。從つて波動函數の上のやうな物理的の意義づけによるかゝる場合に於ける電氣力學的結果は Heisenberg の理論と一致することが理解せられる。

かゝる考察は Compton 効果の波動力學的取り扱ひに於いて Gordon[11]

に依つて, Driac[12] が q一數から得たのと同一の結果に達せしめることが指摘された。此の表象は Schrödinger[13] によつて更に進められ,かく意義付けられたる波動場,即ち Charge の固有の場(Eigenfeld)と外部の電磁場との綜合的な場に對して Energie-Impulssatz の成立することが示されゐる。

物質と電磁場との交互作用を Wellenfeld に依つて此くの如く關係づけやうとすることは極めて興味あるものではあるが,考ふべき幾多の困難がとかれないまゝに殘されるのである。尚茲に物質と輻射との間の交互作用に關係については Dirac[15] の重要なる研究があることを附記して置かう。Dirac の考察の基礎は,固有振動の discrete set を以つて記載せられるやうな輻射場に對してこれを力學的體系とし把握することであつて,以前熱輻射の法則を導き出すために Hohlraum の固有振動を用ひたかの Rayleigh, Jeans の考察方法に基き Hohlraum の輻射場を力學系として取り扱ふとした Rubinowiz, Bohr の見解をおもひ起させる。かくして輻射場と物質との交互作用は次節の一般論を形式的基礎としてある特性的な Hamiltonian によつて記載せられることになつた。この方法は Strahlungsdämpfung, Linienbreite の量子論的把握を可能ならしめるのみならず,輻射場と物質との交互作用に對する波動的記載と光量子的記載との間に完全なる調和の存在を闡明し得たのであつた。しかし乍らもつと一般的な輻射場に對する量子論的把握はいかに建設さるべきか。この質問は,力が光の速さで傳るやうな System をいかに取り扱はるべきか(Hamiltonian による記載が不可能となるであらう)といふ問題,運動する電子による電磁場の生產,及び其の Feld の原子に及ぼす Reaction の問題をよび起すことに依つて,量子論的電磁力學への前進を促してゐる。

—(紹介)—

このやうに波動函數はGewichtfunktionとして物理的に意義付けられたのであるが,尚この外是れに統計的見解(量子論に於いて重要な概念となりつゝあるところの)が結び付けられてゐる——statisticとGewichtとはよく相似た概念ではあるが——,この考へは衝突現象に關するBorn[14]の研究に於いて極めて顯著にあらはれてゐる。Bornに依れば,かのSchrödingerの波動場は,其れを伴ふと考へられたところの, Particleに Pathを指示するところの嚮導の場としての役目をはたすものであつて,其れにはEnergieも所屬しなければ, Impulsをももつてゐない。只Particle,即ちEnergie und ImpulsのTrägerがある一定のPathを辿ることに對する,確度を決定するのみである,といふのである。即ちEinsteinが光量子と波動の場との間の關係について考へた表象と同じである。そうして此の確度は波動函數の値の分布に依つてきまると考へられたのであつた。

さてSchrödingerの波動方程式を考へる。(是れは(6)に於いてParameter Eを消去したものなのである)

$$\Delta\varphi-\frac{8\pi^2\mu}{h^2}V(x,t)\varphi-\frac{8\pi i\mu}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{6'}$$

原子がStörungをうけないとき, Potential energy, V(x)はtimeにindependentであるとする。其のとき此の一般の解は

$$\varphi(x,t)=\sum\nolimits^{n} c_n\varphi_n \tag{8}$$

となる。玆にc_nは任意の常數であつて, φ_nは其の一つのatomの各定常狀態にassociateされてゐるやうに選ばれたと考へる。さてtime t 於いて外部からStörungが加へられたとする。即ち

$$V(x,t)=V(x)+\lambda F(x,t)$$

此のときの解は

$$\psi(x,t)=\sum a_n\varphi_n \tag{8'}$$

——(紹 介)——

なる形式となるであらう。茲に a'_n は time のみの函數であつて. $t=0$ に於いて任意の常數 c'_n をとる。いま (8) なる General solution は Störung をうけないところの原子群を表はしてゐると考へ, $|c_n|^2=|\int\varphi(x,t)\varphi_n dx|^2$ は n^{te} Zustand に在る原子の個數を表すと考へる。そうして (8') も同樣に Störung された原子群を表し, $|a_n|^2=|\int\varphi(x,t)\varphi_n(x)dx|^2$ は n^{te} Zustand にある原子個數を表すと假定する。即ち此れ等は狀態確度を表すのである。

この假定のもとに Dirac[16] は (8') を Störungstheorie に從つて解くことに依つてかの有名な Einstein の Coefficient B'_n を求めてゐる。尙 Born[17] は波動函數の斯かる意味つけに依つてかの Ehrenfest の Adiavatenprinzip を量子力學の見地から證明することができた。

また Born[14] は衝突問題——電子が atomic system に Colide する——の取り扱ひに於いて次のやうに考へてゐる。近付いてゆく電子を表す平面波からなる Schrödinger の波動函數を求める。さて此の波は Atomic System で Scatter せられる。Born による問題の基礎假定はある方向へ Scatter された波動の Amplitude の自乘が電子の其の方向に Scatter される確度を決定すると波動函數を物理的に意義づけることであつた。

この統計的見解は次の理論に於いて一般化せられる。

§ 4. 一般化せられたるマトリツクス論.

Heisenberg の matrix が一般化される必要のあることは旣に知つたとほりである。其の一般化が Jordan[18] Dirac[19] によつてなされた。是れは本質的には同一である。もと Heisenberg の Matrix に於いては,その Energie-matrix の Diagonal element が atom の Energie levels を表しそうして各 element は total Polarization を表し, t について periodic であつて,古典論と analogous に Spectral line の Frequenzen, Intensitäten を決定する,といふ

ことが假定せれたあつた。斯く量子量的量と實測的の物理量とを結び付けるに何らかの假定が必要であつて一般化された理論に於いては新しき物理的意味づけがなされてあることを以下に於いて見るであらう。

先づ Dirac に依つてなされた Matrix の一般化について其の形式論を述べやう。Matrix Mechanics にては行列が system の定常狀態に refer してゐるところの Matrix (力學變數を表す)が得られる。かやうに, α_1, α_2……α_n が運動方程式の 1st Integrals である——n は degree of freedom——ならば各行列は α_1……α_n の特定されたる値 α_1'……α_n' (C—Number である) で label される。そうして力學變數 g を表す matrix element を $g(\alpha_1'\cdots\alpha_n';\alpha_1''\cdots\alpha_n'')$ $(=g(\alpha'\alpha'')$ と簡單のために)とかくことができる。これらの matrix element は time t のみの函數である。行列を label する parameter は discrete な値をとつても連續的値をとつてもよい。以下連續的な場合を typical なものとみてそういふ場合に適當した Formel を書くのであるが, discrete な場合には其れに必要な變更を加へればよいと考へてゐる。matrix の掛算は

$$ab(\alpha'\alpha'')=\int a(\alpha'\alpha''')d\alpha'''b(\alpha'''\alpha'') \tag{1}$$

であつて茲に $d\alpha'=d\alpha_1'\cdots\cdots d\alpha_n'$, 積分は α'''s のとり得るすべての値にわたつてとるのである。

Dirac は行列を label する parameter の値が連續的界域をとるときの matrix 論の展開に必要なものとして次の函數 $\delta(x)$ を考へた。

$$\delta(x)=0 \qquad \text{für } x\neq 0 \tag{2}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1.$$

此れは嚴格に言へば proper function ではなく, function の sequence の極限と考ふ可きである。次に

——(紹　介)——

$$\delta(\alpha_1'-\alpha_1'')\delta(\alpha_2'-\alpha_2'')\cdots\cdots\delta(\alpha_n'-\alpha_n'')=\delta(\alpha'-\alpha'') \tag{3}$$

を element に持つ matrix を考へてみると,

$$\int\delta(\alpha'-\alpha''')d\alpha'''y(\alpha'''\alpha'')=y(\alpha'\alpha'')$$

$$=\int y(\alpha'\alpha''')d\alpha'''\delta(\alpha'''-\alpha'')$$

となるから,(1)を参照してみたとき, $\delta(\alpha'-\alpha'')$ は Einheit matrix であることがわかる。一般の matrix $f(\alpha)$ が $f(\alpha')\delta(\alpha'-\alpha'')$ なる element をもつとき, $f(\alpha')$ なる量を diagonal element と言はふ。

さて §1. で既に知つてゐる, Kanonische Transformation を考へると,是れは

$$G(\alpha'\alpha'')=\iint b(\alpha'\alpha''')=d\alpha'''g(\alpha'''\alpha^{(4)})d\alpha^{(4)}b^{-1}(\alpha^{(4)}\alpha'') \tag{4}$$

となる。 玆に

$$\int b(\alpha'\alpha''')d\alpha'''b^{-1}(\alpha'''\alpha'')=\delta(\alpha'-\alpha'') \tag{5}$$

かゝる變換をなすとき同時に新しき matrix G の行と列とに同一の permutation を行つても, matrix mechanics の基礎方程式には抵觸しない。かく新しき G ともとの g とのあひだには其の行列間に one-one correspondency はないのである。併るに上の (4) では同一の文字が兩 G, g の行列を規定してゐるのであつて, one-one correspondence のある,といふことが含まれてゐる。其れを除くために (4) の Notation を修正して

$$G(\xi',\xi'')=\iint b(\xi'\alpha')d\alpha'g(\alpha'\alpha'')d\alpha''b^{-1}(\alpha''\xi'') \tag{6}$$

玆に ξ's なる parameter は α's とは全く異つた値の界域をとることができる。

次に G の行列をいかに label すべきか,即ち G の行列に parameter ξ_r' の數値の set をいかに指定すべきかについては次の様に考へる。新しき matrix representation に於いて diagonal matrix となるやうな函數(力學

變數の) $\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots \xi_n$ が見出されねばならぬ,そうしたときに,各行,列に,各 ξ_r の其の行と列に存在する diagonal element の値 ξ_r' を指定する。かやうに labelling は ξ_r が

(7) $$\xi_r(\xi'\xi'') = \xi_r'\delta(\xi' - \xi'')$$

なる element をもつやうに行はれるのである。その labelling に於いて, original matrix の labelling に於いて dynamical variable α_r が用ひられたと同様に用ひられるのである。

ξ_r の element は time t を含まぬから, Constant of integtation でなければならぬ。そうして此れは互に vertauschbar (掛け算の交換法則が成立する)であつて, Canonical coordinate をなすから,是れは Conjugate な $\eta_1 \cdots \eta_n$ をもつてゐる。(5) をかき直すと

(5') $$\int b(\xi'\alpha')d\alpha' b^{-1}(\alpha'\xi'') = \delta(\xi' - \xi'')$$

$$\int b^{-1}(\alpha'\xi')d\xi' b(\xi'\alpha'') = \delta(\alpha' - \alpha'')$$

變換式(4)に於いて g と G とを異つた記號で表す必要はない,何故と言ふに同一の變數を二つの異つた Scheme に從つて表すものであつて parameter (ξ, α) は何れの Scheme に屬するかを全く明らかにしてゐるからである。そこで變換式は

(4') $$g(\xi'\xi'') = \int\int(\xi'/\alpha')d\alpha'(\alpha'/\xi'')$$

玆に (ξ'/α'), (α'/ξ') は夫々 $b(\xi'\alpha')$, $b^{-}(\alpha'\xi')$ の簡略である。

容易にわかるやうに二つの變換 b_1, b_2 を successively にほどこすと,其の結果は b_2b_1 なる單一變換の其れに等しい。此れを上の Notation でかき表すと

$$(\varkappa'/\alpha') = \int(\varkappa'/\xi')d\xi'(\xi'/\alpha')$$

$$(\alpha'/\varkappa') = \int(\alpha'/\xi')d\xi'(\xi'/\varkappa')$$

——(紹介)——

ξ's の matrix element は (7) で與へられてゐる。そこで ξ's に Kononische Konjugierte なる變數 η's の element をいかに定義してよいか。次のやうに定義する

(8) $$\eta_r(\xi'\xi'')=\frac{h}{2\pi i}\delta(\alpha_1'-\alpha_1'')\cdots\cdots\delta(\alpha_{r-1}'-\alpha_{r-1}'')\delta'(\alpha_r'-\alpha_r'')\delta(\alpha_{r+1}'-\alpha_{r+1}'')\cdots\delta(\alpha_n'-\alpha''_n)$$

$\delta'(x)$ は $\delta(x)$ の Derivative.

さうすると交替規則

(9) $$\eta_r\eta_s-\eta_s\eta_r=0 \qquad \xi_r\eta_s-\eta_s\xi_r=\begin{cases}0 & r\neq s\\ \dfrac{h}{2\pi i} & r=s.\end{cases}$$

をが滿足せられられることが示めされる。〔但し Conjugate は unique ではなくして $\overset{*}{\eta}_r=\eta_r+\dfrac{\partial F(\xi)}{\partial \xi_r}$

も亦 Conjugate である。これは diagonal matrix ξ_n があたへられても, matrix represenntation にが unique にきまらぬといふことに相應してゐるのである〕

次ぎに吾々は, $f(\xi_r\eta_r)$ が ξ_r, η_r の函數 (η_r について rational integral) であるとき,

(10) $$f(\xi_r\eta_r)(\xi'\alpha')=f\left(\xi_r',\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi'_r}\right)(\xi'/\alpha')$$

$$f(\xi_r\eta_r)(\alpha'\xi')=f\left(\xi_r',-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\xi'_r}\right)(\alpha'/\xi')$$

であることを示すことができる。この (10) なる式は dynamical variable の任意の函數を Diagonalmatrix となすやうな, matrix scheme of representation を得る有力な方法を與へる。例へばいま $F(\xi_r\eta_r)$ を考へてみる。さうして F を diagonal matrix とするやうな matrix scheme, (α) を慾しいと思ふときを,即ち

$$F(\alpha'\alpha'')=F(\alpha')\delta(\alpha'-\alpha'')$$

——(紹介)——

となるやう (α) を求めようとするときを考へて見やう。私たちは (10) よつてこの時

$$(10') \qquad F\left(\xi'_r, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \xi'_r}\right)(\xi'/\alpha') = F(\xi_r \eta_r)(\xi_r' \alpha') = \int (\xi'/\alpha'')d\alpha'' F(\alpha'\alpha'') = F(\alpha')(\xi'/\alpha')$$

を知る。これは ξ_r' を variable としたときの (ξ'/α') に對する普通の微分方程式である。そうして其の相異なる解が parameter $\alpha''s$ によつて區別せられるのである。こうしたとき任意の力學變數 $f(\xi,\eta)$ の (α)matrix element は

$$(10,a) \qquad f(\alpha'\alpha'') = \iint (\alpha'/\xi')d\xi' f\left(\xi_r', \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial \xi_r'}\right)(\xi'/\alpha'')$$

から求められる。從つて上の方程式の固有値が F の Diagonal element なのである。

若し玆で ξ_r, η_r の代りにある特定の時間 t に於ける普通の q_s, q_s' をとり, F を Hamiltonian とすれば (10) はまさに Schrödinger の波動方程式である。かやうにして私たちは量子問題に於ける Schrödinger の方法を得る。そうして Schrödinger の固有函數は (q) matrix schema から Hamiltonian を Diagonalmatrix となすやうに matrix scheme (α) への transformation function (or transformati n matrix の element) であることを知つた。そうして §3 の (7') は (10, a) に相應した意味をもつてゐることがわかる。Hamiltonian が時間 t を explicite に含むときには

$$(11) \qquad H\left(q_r' \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_r'}\right)(q'/\alpha') = \frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}(q'/\alpha')$$

が示めされる。是れは Hamiltonian が t を explicite に含むときの Schrödinger の波動方程式である。

さてこの matrix 理論から物理的結果を得るためにいかなる假定がなされたか,即ち形式論に對する物理的意義付けの問題に移らねばな

らぬ。Dirac によれば,力學系の積分常數 g を表すところの, matrix [其の行,列は ξ''_s に refer する]の diagonal element は, ξ''_s の數値の各特定の組に對する全 η-Space にわたつてとつた $g(\xi_r\eta_r)$ の平均値であると假定する。かやうにして, $\xi'''s$ が $\xi''s$ に近い場合に

$$g(\xi'\xi'')=g(\xi')\delta(\xi'-\xi'')$$

なるとき, $g(\xi')$ を $\xi=\xi_r'$ に於ける全 η- 空間にわたつての g の平均値である,と假定する。これに對應して若し diagonal element が $\delta(\xi'-\xi'')$ のやうな因子をとり去らなくても,有限であるときには, diagonal element $g(\xi'\xi')$ は $\xi_r=\xi_r'$ に於ける全 η- 空間にわたつてとつた $g(\xi_r\eta_r)$ の Integral の $(h)^{-1}$ 倍である,と假定するのである。いま

$$(12)\qquad \delta(g_1-g_1')\cdots\cdots\delta(g_n-g_n')=\delta(g-g')$$

(g は c-Number) を考へて見ると

$$(13)\qquad \int_{g''}^{g'}\delta(g-g')dg'=\begin{cases}1, & g_r'<g_r<g_r'' \\ 0 & g_r \text{ が } g_r',\ g_r'' \text{ のあひだにない時。}\end{cases}$$

そこでいま(12)を表す matrix を考へて見やう。此れを同じ記號 $\delta(g-g')$ でかいておく。[従つて $\int_{g'}^{g''}\delta\, g-g')dg'$ は, $g_r'<g_r<g_r''$ で 1, g_r が $g_r'\,g_r''$ の間で vanish する様な, g_i' の函數を表す Matrix である]。そうすると,上記の假定からして(13)を表す matrix の diagonal element はこの函數の η-average であつて,それは, (13) によつてわかるやうに, $g_r'<g_r<g_r''$ なるやうな, η-空間の全部の分數(或ひは,此の函數の積分 (over the whole η-space) であつて,それは $g_r'<g_r<g_r''$ なるやうな, η-space の total volume) である。

さて $\delta(g-g')$ なる Matrix は如何なるものであらうか? これは次の二つの條件を滿足しなければならぬ。

$$\text{(i)}\qquad (g_r-g_r'\ \delta(g-g')=\delta(g-g')(g-g')=0$$

$$\text{(ii)}\qquad \int\delta(g-g')dg'=1.$$

――(紹　介)――

容易に私たちは

$$(\xi'/g')(g'/\xi')$$

を element に持つ matrix がこの條件を滿足することを verify し得る。

かくして, $\xi_r=\xi_r'$ なる時, $g's$ が二つの與へられたる値のあひだにある,やうな η-space の volume は, (13) を表す matrix の diagonal element

$$\int_{g'}^{g''}(\xi'/g')dg'(g'/\xi') \tag{14}$$

に依つてあたへられる。此の volume は若し g_r の integration range が g_r の固有値(即ち (g) schme of matrix Represetation に於ける, g_r を表す matrix の Diagonal element として存在する値)を含まぬとき,零となることが直ちにわかる。何故ならば,かゝる時には (ξ'/g'), (g'/ξ') は積分界域内到る處で vanish するからである。是れよつて積分常數の固有値が,實際 q-數のとり得る値であることを示してゐる。$\delta(g-g')$ なる matrix (ξ''scheme) に於ける Diagonal element $(\xi'/g')(g'/\xi')$ には ξ' と g' とについて symmetric である。是のことから次の所謂 Reciprocal theorem が成り立つ。$\xi_r=\xi_r'$, $g_r'<g_r<g_r'+\varepsilon_r$ なる, η-space の volume は, $g_r=g_r'$, $\xi_r<\xi<\xi_r'+\varepsilon_r$ なるやうな, $g's$ に conjugate なる變數の Space の Volume に等しい。事實両者ともに $(\xi'/g')(g'/\xi')\varepsilon$ である。(ε は all ε_r の product)

特に $g_r=\eta_r$ とすれば Orthogonal relation を考へに入れると (10′) からわかるやうに

$$(\xi/\eta)=\frac{1}{\sqrt{h}}\exp\left[-\frac{2\pi i}{h}\sum\xi_r\eta_r\right]$$

是れから $\xi_r=\xi_r'$, $\eta_r'<\eta_r<\eta_r'+\varepsilon_r$ なる, η-space の volume は η_r' に無關係に ε である。即ち $\xi_r=\xi_r'$ に對して η_r の可能なすべての値は gleich wahrscheinlich である,と言ひ得る。[かくして kanonische konjugierte Variable の物理的意義がつけられる]. であるから上記の

——(紹 介)——

$$\int_{q'}^{q''}(\xi'/q')(q'/\xi')dq'$$

は，$\xi_r=\xi_r'$ なるとき，g_r が g_r''，g' のあひだの値をとる確度である，と見ることができる。尙この物理的意義に對する論理的支柱として二三の解析的關係が證明さるべきであり(すべて物理學的假定に於いてさうであるやうに)そうして Jordan に依つてなされてゐるのであるが玆には立ち入らないでおく

次に前節に於ける波動函數の統計的な解釋と比較してみやう。

$\varphi_0(\alpha')$: Eigenfunktion für ungestörte System. $(t=0)$

$\varphi_t(\alpha')$: 〃 〃 gestörte 〃 $(t=t)$

φ_t を φ_0 について expand する

(15) $$\varphi_t(\alpha')=\int\varphi_0(\alpha'')d\alpha''c(\alpha''\alpha')$$

前節の解釋によれば $|c(\alpha''\alpha')|^2$ は $t=0$ に於いて α' の狀態にありしものが $t=t$ 後に α' と $\alpha'+d\alpha'$ との間にあることの確度である。

こゝの理論から言へば次のやうになる。力學的變數 α (是れは $p's$ $q's$ の函數で explicitely と t を含まぬ)の time t に於ける値 α_t と initial value α_0 を結び付ける變換函數 (α_t'/α_0')，(α_0'/α_t') を先づ求めねばならぬ，そうすると要求される確度は

$$(\alpha_0/\alpha_t)d\alpha_t'(\alpha_t'/\alpha_0')=|(\alpha_t'/\alpha_0')|^2\,d\alpha_t'$$

((α_0/α_t') が Conjugate のときに)となる。ところで q_t を time t に於ける座標 q の値とすれば，

(16) $$(q_t'/\alpha_0')=\int(q_t'/\alpha_t')d\alpha_t'(\alpha_t'/\alpha_0)$$

こゝに，(10)，(10')，(11) から分るやうに，(q_t'/α_0') は Störung を受けた system に屬する波動函數であり，(q_t'/α_t') は，α_t' と p_t'，q_t' を結び付ける解析的關係にのみ依存するもので，(q_0'/α_0') と同じ函數形式をもつてゐなければ

ばならない,だから是れは ungestörte System に對する固有函數を q_i', α_i' の variable の term でかゝれたものであるにすぎない。かやうして(15)は(16)にひとしい. 從つて (α_i'/α_0') は (18) の $c(\alpha''\alpha')$ [是れは正しくは $c(\alpha_i'\alpha_0')$ とかゝれねばならない]と同じものである。

同様に Born の Collision の取り扱ひに於ける統計的解釋もこの理論に含まれることが示される。尚此の Jordan, Dorac の理論に對して anschaulich な方面からの重要な補充が Heisenberg[20] に依つてなされてゐる。そこでは力學系の記載にあづかる,すべての概念(例へば位置,速度の如き)を可能的な實驗のもとに把握すべきものとされ,力學變數の數値を可能的な實驗の實測的結果として考へられてゐる。そうして古典論で用ひられる,すべての當該概念は原子現象に對しても亦古典學的概念と類同的に決定せられるのであつた。併し乍ら,こゝに特性的な考察はかゝる決定に役だつための實驗が,若し私たちが同時に二つの kanonisch konjugierte な量を決定しやうとしたとき,いつもある不決定さ (Unbestimmtheit) を伴ふ,といふことである。そうして Heisenberg はこのところに量子論の基本的要請を,例へばかの統計的見解のあられることに對する基礎を見たのであつて,極めて重要な考察であるが,玆では詳く立ち入ることを省き以上までの大略の紹介に止めやうと思ひます。

主なる文獻

(1) Bohr, Kramers u. Slater, Zeitschr.f. Phys. 24, 69. (1924)
Geiger u. Bothe, Zeitschr. f. Phys 32, 639. (1925)
A. H. Compton u. A.W. Simon, Phys. Rev. 26, 289. (1926)
H.A. Kramers u. W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. 31, 681. (1925)

──(紹　介)──

M. Born, Zeitschr. f. Phys. 26, 379. (1924)

(2) W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. 33, 879. (1925)

(3) M. Born u. P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. 34, 958. (1925)

(4) M. Born, W. Heisenberg u. P. Jordan, Zeitschr. f. Phys, 35, 557. (1925)

(5) P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. 37, 383. (1926); 38, 513. (1926)

(6) P. A. M. Dirac, Proc. of the Roy. Soc. of London, Ser. A. 110, 561. 1926)

(7) L. de Broglie, Ann, de Physique 3, 22. (1925)

(8) E. Schrödinger, Ann. d. Phys, 79, 361. (1926)

(9) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79, 734. (1926)
C. Eckart, Phys. Rev. 28, 711. (1926)

(10) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 81, 109. (1926)
Ann. d. Phys. 82, 265. (1927)

(11) W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. 40, 117. (1926)

(12) P. A. M. Dirac, Proc. of the Roy. Soc. of London, Ser. A. 111, 405. (1926)

(13) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 82, 256. (1926)

(14) M. Born, Zeitschr. f. Phxs. 38, 803. (1926)

(15) P.A. M. Dirac, Proc. of the Roy. Soc. of London, Ser. A. 114, 243, (1927)

(16) P. A. M. Dirac, Proc. of the Roy. Soc. of London, Ser. A. 112, 661. (1926)

(17) M. Born, Zeitschr. f. Phys, 40, 167. (1926)

(18) P. Jordan, Zeitschr. f. Phys. 40, 809. (1926); 44, 1. (1927)

(19) P. A. M. Dirac, Proc. of the Roy. Soc. of London, Ser. A. 113, 621. (1927)

(20) W. Heisenberg, Zeitsehr. f. Phys. 43, 172. (1927)

——(紹 介)——